Контур с током в магнитном поле

Пусть дан замкнутый контур с током I в однородном магнитном поле $\vec{B} = const$.

На каждый элемент контура $d\vec{l}$ действует сила Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}; \vec{B}] \tag{1}$$

Сила, действующая на весь контур:

$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l}; \vec{B}] \tag{2}$$

$$\vec{F} = I[\oint d\vec{l}; \vec{B}] \tag{3}$$

Но $\oint d\vec{l} = 0$, поэтому результирующая сила $\vec{F} = 0$. Это справедливо для контуров любой формы.

Момент силы $\vec{F}$, действующей на контур, относительно выбранной точки O' определяется выражением:

$$\vec{N} = \oint [\vec{r}; d\vec{F}] \tag{4}$$

Возьмем точку O', смещенную относительно O на отрезок $\vec{b}$. Тогда $\vec{r} = \vec{r'} + \vec{b}$ и $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{b}$. Момент относительно этой точки равен:

$$\vec{N}' = \int [\vec{r'}; d\vec{F}] = \int [(\vec{r} - \vec{b}), d\vec{F}] = \int [\vec{r}; d\vec{F}] - \int [\vec{b}; d\vec{F}] = \vec{N} - 0 = \vec{N} \tag{5}$$

Таким образом, моменты силы $\vec{F}$ относительно двух точек совпадают.

Представим плоский контур в однородном магнитном поле, направленном параллельно плоскости контура. Выделим в контуре тонкую полоску площади $dS = xdy$, параллельную $\vec{B}$. На края этой полоски действуют силы, модули которых равны $F_1 = F_2 = IBdy$.

Момент пары этих сил равен:

$$dN = IBxdy = IBdS \tag{6}$$

$d\vec{N}$ перпендикулярен нормали к контуру и вектору $\vec{B}$, поэтому можно написать:

$$d\vec{N} = I[\vec{n}; \vec{B}]dS \tag{7}$$

Просуммировав выражение по всем полоскам, получим момент сил, действующих на контур с током со стороны магнитного поля, параллельного контуру:

$$\vec{N} = \int I[\vec{n}; \vec{B}]dS = I[\vec{n}; \vec{B}] \int dS = I[\vec{n}; \vec{B}]S = [IS\vec{n}; \vec{B}] = [I\vec{S}; \vec{B}] \tag{8}$$

Перепишем через магнитный момент:

$$\vec{N} = [\vec{p}_m; \vec{B}] \tag{9}$$

Теперь представим, что поле $\vec{B}$ совпадает с нормалью $\vec{n}$. Момент сил имеет вид:

$$\vec{N} = \int d\vec{N} = \int [\vec{r}; d\vec{F}] = I \oint [\vec{r}; [d\vec{l}; \vec{B}]] \tag{10}$$

Отсюда по формуле "бац минус цаб":

$$\vec{N} = I(\oint (\vec{r}; \vec{B})d\vec{l} - \oint \vec{B}(\vec{r}; d\vec{l})) \tag{11}$$

$\vec{r} \perp \vec{B}$, поэтому первый интеграл равен нулю. Скалярное произведение под знаком второго интеграла равно $rdr = \frac{1}{2}d(r^2)$, т.е. второй интеграл равен:

$$\frac{1}{2}\vec{B} \oint d(r^2) \tag{12}$$

Он тоже равен нулю. Таким образом, при данном направлении $\vec{B}$ момент сил равен нулю.

Наконец, пусть направления векторов $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ образуют угол α. Видно, что вращающий момент создается только тангенциальной (параллельной контуру) составляющей $B_\perp$

Таким образом, в самом общем случае момент магнитных сил, действующих на контур с током, равен:

$$\vec{N} = [\vec{p}_m; \vec{B}] \tag{13}$$

Чтобы увеличить угол между $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ на $d\alpha$, требуется совершить работу

$$dA = Nd\alpha = p_m B \sin\alpha d\alpha \tag{14}$$

Эта работа равна приращению механической потенциальной энергии контура:

$$dW_p = p_m B \sin\alpha d\alpha \tag{15}$$

Интегрируем:

$$W_p = -p_m B \cos\alpha + const \tag{16}$$

Отсюда (принято считать $const = 0$):

$$W_p = -p_m B \cos\alpha = -(\vec{p}_m; \vec{B}) \tag{17}$$

Если поле $\vec{B}$ неоднородно, контур будет втягиваться в область с большим значением B. Силу такого "втягивания"можно найти как $-\vec{\nabla} W_p$.